

$$u(x,y) = f(x+y) + \frac{1}{x-y} g(y^2 - x^2)$$

$$(2) \Rightarrow u_{xy} - x u_x + u = 0$$

$$u_2 = 2e - \dots$$

Date :

1/13) $\Rightarrow u_y = 2e$ --- Subject:

33

المعادلات التفاضلية الجزئية من النمط التالي:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{f(x,t)}{p(x,t)} \quad \text{و} \quad a = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

$$= \frac{1}{p} f(x,t)$$

طاقة ذبذبات الوتر : نظري (م) إثبات $E = K + U$

سوف نعين صيغة الذبذبات المرصية للوتر $E = K + U$
 طاقة حركية \rightarrow طاقة مرصية \rightarrow طاقة كلية

علما ان طرفا الوتر مثبت من طرفين.
 عنصر الوتر δx الذي يتحرك بالسرعة $u_t = u_1$ يكون له طاقة

$$\text{مرصية في } \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho(x) [u_t(x,t)]^2 \delta x$$

وطاقة مرصية الوتر كله تساوي:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) [u_t(x,t)]^2 \delta x$$

حان طاقة الوضع:

طاقة وضع الذبذبات الارصية للوتر ذي الشكل:

$$u(x_0, t_0) = u_0(x)$$

في اللحظة الزمنية $t = t_0$ تساوي العمل اللازم بذله لكي

ينتقل الوتر من وضع التوازن الى وضع $u_0(x)$

نفرض ان الدالة $u(x,t)$ تعطي المقطع الجانبي للوتر في اللحظة

$$t \text{ علما بان: } u(x,0) = 0, \quad u(x_0, t_0) = u_0(x)$$

والوتر δx تحت تأثير محصلة قوى الشد:

$$T u_x |_{x+\delta x} - T u_x |_x = T u_{xx} \cdot \delta x$$

يقطع خلال الفترة الزمنية δt المسافة δx $u + (x,t)$

التدريبات 8 ← 11 كثره
11 ← 1 طالب

رائد 11 ← 8
2 ابراهيم

Date : / /

Subject:

والعمل الذي يبذله الوتر كله خلال الفترة t يساوي

$$\left\{ \int_0^P T_0 u_{xx}(x,t) \cdot u_t(x,t) dx \right\} dt$$

نكامل بالتجزئة نفرض

$$T_0 u_{xx} dx = d\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E} = T_0 u_x$$

$$u_t = u \Rightarrow du = T_0 u_x dt dx$$

$$= \left\{ T_0 u_x \cdot u_t \Big|_{x=0}^{x=P} - \int_0^P T_0 u_x u_{xt} dx \right\} dt$$

$$= \left\{ T_0 u_x \cdot u_t \Big|_{x=0}^{x=P} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^P T_0 (u_x)^2 dx \right\} dt$$

و بإجراء التكامل بالنسبة لـ t من $t=0$ إلى $t=t_0$

$$\int_0^{t_0} \left\{ T_0 u_x u_t \Big|_{x=0}^{x=P} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^P T_0 (u_x)^2 dx \right\} dt$$

$$= \int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_{x=0}^{x=P} dt - \frac{1}{2} \left[\int_0^P T_0 (u_x)^2 dx \right]_{T=0}^{T=t_0}$$

وبما أن طرفاً الوتر مثبتين فإن الحد الأول يساوي الصفر

$$\text{وبالتالي نصل إلى: } -\frac{1}{2} \int_0^P T_0 [u_x(x, T_0)]^2 dx$$

وبالتالي العمل لا يعتمد عند انتقال الوتر المنبسط الطرفين

من وضع التوازن $u=0$ إلى وضع $u_0(x)$ على طرفي نعل

الوتر إلى هذا الوضع ويكون صافياً

$$-\frac{1}{2} \int_0^P T_0 [u_x(x)]^2 dx$$

أي الطاقة وضع الوتر U في اللحظة $t=t_0$ بالاشارة

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l T_0 [u_x(x)]^2 dx \quad \text{مضادة}$$

وبذلك تكون الطاقة الكلية للوتر مادية:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [T_0 (u_0)^2 + P(x) \cdot [u_1]^2] dx$$

حيث P الكثافة الخطية للوتر و T_0 مقدار الشد

صياغة المسألة الحدية ومألة كوشي :

نفرض أنه لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية

$$A(x,y) u_{xx} + 2B(x,y) u_{xy} + C(x,y) u_{yy} =$$

$$F(x,y, u, u_x, u_y) \quad (1)$$

$$u(x,y)|_{\Gamma} = u_0(x,y) \quad \text{ونفرض أن:}$$

$$\frac{\partial u}{\partial p}|_{\Gamma} = u_1(x,y) \quad (2)$$



ونفرض D المنطقة التي يكون فيها $B - AC > 0$ أي

المنطقة الزائدية كما في الشكل

ونفرض أن المنحنى Γ هو المنحنى للعصبة لهذه المنطقة

و $u_0(x,y)$ و $u_1(x,y)$ دالتان معرفتان على المنحنى Γ والمطلوب

إيجاد دالة $u(x,y)$ في المنطقة D بحيث أن هذه الدالة

تحقق المعادلة التفاضلية المعطاة (1) وعلى المنحنى Γ تحقق

الشروط الابتدائية (2) هذه الدالة نسميها حل المعادلة التفاضلية

المعطاة (1) والموافق للشروط الابتدائية (2) علماً أن $\frac{\partial u}{\partial p}$

Date : / /

Subject:

المسألة في الاتجاه العودي على المنحني 3

ملاحظة:

حل المعادلة التفاضلية (1) في المنطقة الزائدية بكاملها وذلك شرط أن الدالة $u(x, y)$ تحقق المعادلة

المعطاة (1) والشرط الابتدائية الآتية

$$u(x, y)|_y = \varphi(x) \quad u(x, y)|_x = \psi(x)$$

هذه المسألة تدعى مسألة كورس

أثبت صحة النظرية وحلها

نظرية الوحدة:

أثبتت نظرية الوحدة:

بعض النظرية: من الممكن وجود دالة واحدة فقط $u(x, t)$

$$R = \{ 0 \leq x \leq l, t \geq 0 \}$$

وتحقق المعادلة التفاضلية الآتية:

$$\rho(x) u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} [K(x) u_x] + F(x, t) \quad (1)$$

علماً أن: $t > 0, 0 < x < l, \rho(x) > 0, K(x) > 0$

والشرط الإضافية:

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad 0 < x < l \\ u(0, t) &= M_1(t), \quad u(l, t) = M_2(t) \quad t > 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

إذا تحقق الشرط الآتية:

(1) الدالة $u(x, t)$ المستقاة التي تدخل في المعادلة (1)

وسلك المسألة $u(x, t)$ تكون دالة مفصلة في الفترة

$$0 \leq x \leq l, t \geq 0$$

المطلقة

(2) المعاملات $K(x)$ و $M_1(t)$ و $M_2(t)$ مفصلة في الفترة المطلقة

$$0 \leq x \leq l$$

البرهان :

نقرض أنه يوجد حلان للمعادلة المظروحة هما $u_1(x,t)$ و $u_2(x,t)$.

وبعد ذلك ندرس الفرق : $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$

أ سوف نثبت أن الدالة $u(x,t)$ تحقق المعادلة المتجانسة للمعادلة (1) أي تحقق المعادلة :

$$f(x) u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} [k(x) \cdot u_x]$$

و ذلك كما يلي :

بما أن $u_1(x,t)$ حل للمعادلة (1) فهو يحقق هذه المعادلة

$$f(x) u_{1tt} = \frac{\partial}{\partial x} [k(x) u_{1x}] + f(x,t)$$

وأيضا بما أن $u_2(x,t)$ حل للمعادلة (1) فهو يحقق هذه المعادلة أي :

$$f(x) u_{2tt} = \frac{\partial}{\partial x} [k(x) u_{2x}] + f(x,t)$$

بطرح المعادلتين

$$f(x) [u_{1tt} - u_{2tt}] = \frac{\partial}{\partial x} [k(x) (u_{1x} - u_{2x})]$$

$$f(x) \cdot u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} [k(x) u_x]$$

أيضا الدالة $u(x,t)$ تحقق الشروط الإضافية المتجانسة

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) &= 0 & u_t(x,0) &= 0 \\ u(x,1) &= 0 & u_t(x,1) &= 0 \end{aligned} \right\} (4)$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 0, \quad u_t(x,1) = 0$$

و ذلك بالإعتداد بالشروط (2)

و سوف نثبت أولا أن الدالة $u(x,t)$ تادي الصفر

بالطريقة وذلك كما يلي :

ندرس الدالة

$$E = \frac{1}{2} \int_0^1 [k(x) (u_x)^2 + f(x) (u_t)^2] dx \quad (5)$$

و سوف نثبت أنها لا تتعدى كل t :

Date : / /

Subject:

المعنى الفيزيائي للدالة $E(t)$ واضح وهي الطاقة الكلية الوترية للحظة الزمنية t تقاضل صير في العلاقة (5) بالنسبة لـ t نجد:

$$\frac{\delta E(t)}{\delta t} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta t} \left[\int_0^P [k(u_x)^2 + P(u_t)^2] dx \right]$$

$$= \int_0^P (k u_x u_{xt} + P u_t u_{tt}) dx$$

$$\int_0^P k u_x u_{xt} dx + \int_0^P P u_t u_{tt} dx$$

وبتكامل الحد الأول من الطرفين الأيمن بالجزئية وبالأستفادة من الشروط الإضافية المطلوبة (أما) نحصل على

$$\int_0^P k u_x u_{xt} dx = \left[k u_x u_t \right]_{x=0}^{x=P} - \int_0^P u_t \frac{\delta}{\delta x} (k u_x) dx$$

$$= - \int_0^P u_t \frac{\delta}{\delta x} (k u_x) dx$$

وبالتالي نجد أن:

$$\frac{\delta E(t)}{\delta t} = \int_0^P \left[P u_t u_{tt} - u_t \frac{\delta}{\delta x} (k u_x) \right] dx$$

$$= \int_0^P u_t \left[P u_{tt} - \frac{\delta}{\delta x} (k u_x) \right] dx$$

$$\frac{\delta E(t)}{\delta t} = 0$$

وبالأعتداد على العلاقة (3) نحصل على:

$$E(t) = \text{const}$$

أي أن الطاقة الكلية محفوظة؛

وبذلك نلاحظ أن الشروط الأولية المستفادة من العلاقات السابقة تتفق مع فرض العلاقة (5)

Date : / /

Subject:

$$E(0) = \text{Const} = \frac{1}{2} \int_0^l [k(\varphi_x)^2 + f(\varphi_x)^2] dx = 0$$

$$E(t) = 0$$

$$\frac{1}{2} \int_0^l [k(\varphi_x)^2 + f(\varphi_x)^2] dx = 0$$

وبما أن $k > 0$ و $f > 0$ عند $x \in [0, l]$ و $t > 0$

فإن من العلاقة الأخيرة نتحقق من أجل:

$$\varphi_x(x, t) = 0, \quad \varphi_t(x, t) = 0$$

وبالمكان كله: $\varphi(x, t) = C_0$

وبالاستمرارية بالشرط الابتدائي المتجانس (C)

$$\varphi(x, 0) = C_0 = 0$$

أي أن $C_0 = 0$ وبالتالي $\varphi(x, t) = 0$

$$u_1(x, t) - u_2(x, t) = 0$$

$$\Rightarrow u_1(x, t) = u_2(x, t)$$

مثال ١

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$u_{xy}^2 + u_{yy} - \frac{2}{y} u_y = 0 \quad (1)$$

في المنطقة $y > 0$ والذي تحقق الشرط الابتدائي

$$u(x, y) \big|_{y=1} = 1-x \quad \text{و} \quad u_y(x, y) \big|_{y=1} = 3 \quad (2)$$

$$u(x, 1) = 1-x \quad \text{و} \quad u_y(x, 1) = 3$$

الحل

أولاً: أيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة:

$$A=0 \quad f \geq B=y^2 \quad f \leq 1$$

Date : / /

Subject:

$$B^2 - 4Ac = \frac{y^4}{4} - 0 > 0 \quad \text{هذه المعادلة من القطع الزائدي}$$

المعادلة المستمرة :

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0$$

$$- y^2 dx dy + dx^2 = 0$$

$$dx [-y^2 dy + dx] = 0$$

$$x = c_1 \Leftrightarrow u_x = 0 \Rightarrow -y^2 dy + dx = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3} y^3 + x = c_2$$

$$\begin{cases} x \\ y \end{cases} \quad \psi = 3x - y^3$$

$$3x - y^3 = c_2$$

نجري التحويل

$$\xi_x = 1, \quad \xi_y = 0, \quad \xi_{xy} = \xi_{yx} = \xi_{yy} = 0$$

$$\eta_x = 3, \quad \eta_y = -3y^2, \quad \eta_{xy} = 0, \quad \eta_{xx} = 0, \quad \eta_{yy} = -6y$$

$$- u_y = -3y^2 u_u$$

$$- u_{xy} = u_{yy} \cdot \xi_x \xi_y + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \xi_x \eta_y + u_{\xi\xi} \xi_{xy} + u_{\xi\eta} \eta_{xy} \quad (4)$$

$$u_{xy} = -3y^2 u_{\xi\eta} - 9y^2 u_{\eta\eta}$$

$$- u_{yy} = u_{yy} \cdot \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_{\xi\xi} \xi_{yy} + u_{\xi\eta} \eta_{yy}$$

$$u_{yy} = 9y^4 \cdot u_{\xi\eta} - 6y u_{\eta\eta}$$

$$-3y^4 u_{\xi\eta} - 9y^4 u_{\eta\eta} + 9y^2 u_{\xi\eta} - 6y u_{\eta\eta} =$$

$$\frac{2}{y} [-3y^2 u_{\xi\eta}] = 0$$

$$= -3y^4 u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow u_{\xi\eta} = 0$$

Date : / /

Subject:

$$\frac{\partial}{\partial y} [u_y] = 0$$

بمثبتية y والمعادلة بالنسبة لـ y :

$$u_y = u_1(y)$$

بمثبتية x والمعادلة بالنسبة لـ x :

$$u(x, y) = \int u_1(y) dx + \phi(y)$$

$$u(x, y) = \psi(y) + \phi(x)$$

بالعودة للتمسك مع الدالة

$$u(x, y) = \phi(x) + \psi(3x - y^2) \quad \text{--- (3)}$$

وهو الحل العام.

الحدود والنهايات

علاقة العلاقة u بالنسبة لـ y

$$u_y = -3y^2 \psi'(3x - y^2) \quad \text{--- (4)}$$

من (3)، (4)، (5) نجد

$$1 - x = \phi(x) + \psi(3x - 1) \quad \text{--- (5)}$$

$$3 = -3 \cdot \psi'(3x - 1) \quad \text{--- (6)}$$

في العلاقة (6) فنحصل على

$$\psi'(3x - 1) = -1$$

$$3x - 1 = x \Rightarrow \psi(x) = -1$$

وبالمعادلة في (5) أن

$$\psi(x) = -x \Rightarrow \psi(3x - 1) = -(3x - 1) \quad \text{--- (7)}$$

نبدل 7 في 5 فنحصل على

$$\phi(x) = 1 - x + 3x - 1 \Rightarrow \phi(x) = 2x \quad \text{--- (8)}$$

نبدل في العلاقة (7) $3x - 1$ بـ $3x - y^2$ فنحصل على

$$\psi(3x - y^2) = -(3x - y^2) = y^2 - 3x \quad \text{--- (9)}$$

نبدل (8)، (9) في الحل العام u فنحصل على الحل النهائي

Date : / /

Subject: _____

$$u(x, y) = 2x + y^3 - 3x$$

$$u(x, y) = y^3 - x$$

20/19

ج(2)

أوجد الدالة المعادلة التفاضلية

$$x u_{xy} - y u_{yy} - u_y = 2x^2 \quad (1)$$

في المنطقة $x > 0$ والحدود الأولية

$$u|_{y=0} = \sin x, \quad u_x|_{y=0} = \cos x \quad (2)$$

$$A=0, \quad 2B=x, \quad C=-y$$

$$B^2 - AC = \frac{x^2}{2} > 0$$

المعادلة المعبرة

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0$$

$$-x dx dy - y dx^2 = 0$$

$$-dx [x dy + y dx] = 0$$

$$-dx = 0 \Rightarrow x = c_1 \text{ أو } 0$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln y + \ln x = \ln c_2 \Rightarrow \ln(xy) = \ln c_2$$

$$y \cdot x = c_2$$

$$\xi = x, \quad \eta = x \cdot y \quad (3)$$

}

$$u_{\eta\eta} = 2\xi$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [u_{\eta}] = 2\xi$$

Date : / /

Subject:

بنتج u والمكاملة بالنسبة ل y نجد

$$u_y = \int 2y \, dy + \varphi_1(x)$$

$$u_y = 2y + \varphi_1(x)$$

بنتج u والمكاملة بالنسبة ل x نجد

$$u(x, y) = 2y \int x \, dx + \int \varphi_1(x) \, dx + \varphi(y)$$

$$= x^2 y + \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$u(x, y) = x^2 y + \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{--- (4)}$$

وهو الحل العام

الحد الأدنى من

نشتق عبارة الحل العام (4) بالنسبة ل x :

$$u_x = 2xy + \varphi'(x) + y \quad \text{--- (4')}$$

من (2) و (4) و (4') نجد:

$$\sin x = x^4 + \varphi(x) + y \quad \text{--- (5)}$$

$$\cos x = 4x^3 + \varphi'(x) + x \cdot y' \quad \text{--- (6)}$$

نشتق العلاقة 5 بالنسبة ل x :

$$\cos x = 4x^3 + \varphi'(x) + 2x y' \quad \text{--- (5')}$$

نطرح 5 و 5' نجد:

$$0 = x^3 + x y'$$

$$y' = -x^2$$

$$\text{نقرب } x = x^2 \Rightarrow y' = -x \Rightarrow y = -\frac{1}{2} x^2$$

$$y(x^2) = -\frac{1}{2} (x^2)^2 \quad \text{--- (7)}$$

نبدل (7) في (5) فنحصل

$$\varphi(x) = \sin x - x^4 + \frac{1}{2} x^4$$

Date : / /

Subject:

$$u(x) = \sin x - \frac{1}{2} x^4 \quad \text{--- (8)}$$

لبدء في (7) x^4 و $x^3 y$

$$v(x, y) = -\frac{1}{2} x^2 y^2 \quad \text{--- 9}$$

نبدأ 8 و 9 في البدء الفأ ؟ (5) :

$$* u(x, y) = x^3 y + \sin x - \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{2} x^2 y^2$$

وهو الحل الخاص المطلوب .